Asignatura: Sistemas y señales discretos.
Tema: **Operaciones con señales discretas con MATLAB.**
Lugar de Ejecución: Instrumentación y control
(Edificio de electrónica)

Objetivos específicos

- Realizar operaciones de suma, resta, energía y potencia con señales de tiempo discreto.
- Realizar la convolución discreta de dos señales adquiridas por la tarjeta de sonido.
- Realizar la autocorrelación discreta de dos señales adquiridas por la tarjeta de sonido.

Materiales y equipos

1 Computadora con sistema operativo Windows y MATLAB.
1 Micrófono para PC
2 Parlantes

Introducción teórica

Las señales se pueden clasificar por su duración, por su simetría y por su energía y potencia. Para esta última clasificación tenemos:

- Energía de una señal: $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$
- Potencia de una señal: $P_x = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt$
- Una señal se dice que es de energía si E_x es finito, lo que implica que Px es 0. Ej. Pulsos limitados en el tiempo.
- Una señal se dice que es de potencia si P_x es finito, lo que implica que E_x es infinito. Ej. Una señal periódica.

Operaciones con las señales:

- Desplazamiento en el tiempo: *x(t-2),* desplazamiento a la derecha.
- Compresión del tiempo: *x(2t)*
- Dilatación del tiempo: *x(t/2)*
- Reflexión: *x(-t)*

La convolución:

Mediante la convolución calcularemos la respuesta de un sistema (*y(t)*) a una entrada arbitraria (*x(t)*). Hay dos condiciones para realizar la convolución:

- El sistema debe ser lineal invariable en el tiempo (LTI).
- La respuesta al impulso del sistema es *h(t).*

Mediante convolución somos capaces de determinar la respuesta del sistema a una señal de entrada a partir de la respuesta del sistema a una entrada impulso.

La función *h(t)* se define para $t \geq 0$ y decrece cuando $t \to \infty$ para la mayoría de los sistemas físicos. Por tanto,

- La respuesta en t_0 depende de los valores actual y pasado de la entrada y de la respuesta al impulso.
- Los valores más recientes de *x(t)* son multiplicados por sus correspondientes más antiguos (y más grandes) valores de *h(t).*

Propiedades de la convolución (se supone que *x(t)* h(t)= y(t)*):

$$\left[x_1(t)+x_2(t)\right]*h(t)=y_1(t)+y_2(t)$$
$$\left[K_1x_1(t)+K_2x_2(t)\right]*h(t)=K_1y_1(t)+K_2y_2(t)$$
$$x(t)*h(t-\alpha)=y(t-\alpha)$$
$$x(t-\alpha)*h(t-\beta)=y(t-\alpha-\beta)$$
$$\delta(t)*h(t)=h(t)$$
$$x(t)*h'(t)=x'(t)*h(t)=y'(t)$$
$$x'(t)*h'(t)=y''(t)$$
$$x^m(t)*h^n(t)=y^{m+n}(t)$$
$$x(\alpha t)*h(\alpha t)=\left|\frac{1}{\alpha}\right|y(\alpha t)$$

La Convolución Discreta:

Cuando se trata de hacer un procesamiento digital de señal no tiene sentido hablar de convoluciones aplicando estrictamente la definición ya que sólo disponemos de valores en instantes discretos de tiempo. Es necesario, pues, una aproximación numérica.

Para realizar la convolución entre dos señales, se evaluará el área de la función $x(\lambda)\, h(t-\lambda)$. Para ello, disponemos de muestreos de ambas señales en los instantes de tiempo nt_s, que llamaremos $x_s[k]$ y $h_s[n-k]$ (donde *n* y *k* son enteros) . El área es, por tanto,

$$y_s[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} t_s\, x_s[k]\,h_s[n-k]=t_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k]\,h_s[n-k]$$

La convolución discreta se define para un intervalo de muestreo $t_s = 1$:

$$y_s[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s[k]\,h_s[n-k]$$

En la práctica se trabaja con secuencias de longitud finita. Para hacer la convolución, una de las secuencias se refleja y se desplaza sucesivamente. Veremos algunos métodos para calcular la convolución a partir de dos secuencias.

Método de la tira deslizante (Sliding Strip Method)

Sea $h[n]=\{ 2,5,0,4 \}$, $x[n]=\{ 4,1,3 \}$, $t_s = 1/2$. Las dos secuencias comienzan en *n=0.*
Hacemos el "reflejo" de una de ellas, $x[-n]=\{ 3, 1, 4 \}$.
Alineamos las secuencias y las sumamos y desplazamos sucesivamente.

	$t = 0$	$t = t_s$	$t = 2t_s$
h	2 5 0 4	2 5 0 4	2 5 0 4
k	3 1 4	3 1 4	3 1 4
	0 0 8 0 0 0	0 2 20 0 0	6 5 0 0
	Suma = 8	Suma = 22	Suma = 11
	$y_s[0]=8*½=4$	$y_s[1]=22*½=11$	$y_s[2]=11*½=5.5$

	$t = 3t_s$	$t = 4t_s$	$t = 5t_s$
h	2 5 0 4	2 5 0 4	2 5 0 4
k	3 1 4	3 1 4	3 1 4
	0 15 0 16	0 0 0 4 0	0 0 0 12 0 0
	Suma = 31	Suma = 4	Suma = 12
	$y_s[3]=31*½=15.5$	$y_s[4]=4*½=2$	$y_s[2]=12*½=6$

La convolución discreta *y[n]* es *{8,22,11,31,4,12}* . La convolución numérica es *{4,11,5.5,15.5,2,6}.*

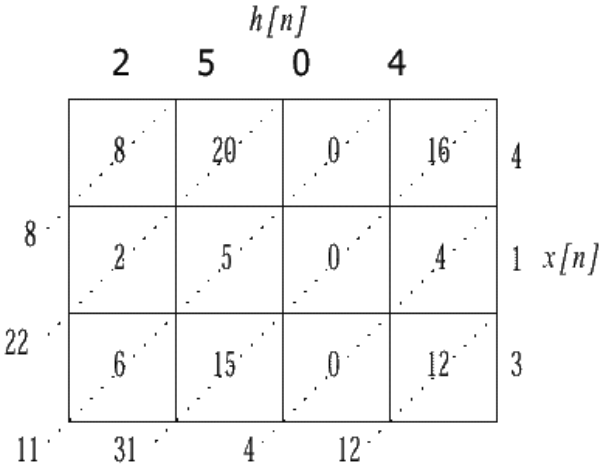
Método de las Suma por Columnas

Hacemos el mismo ejemplo. No es necesario "reflejar" una de las secuencias.

n	0	1	2	3	4	5
h	**2**	**5**	**0**	**4**		
x	4	1	3			
	8	20	0	16		
		2	5	0	4	
			6	15	0	12
y	8	22	11	31	4	12

y[n] = {8,22,11,31,4,12}, n=0, 1, 2,..., 5

Método de la malla.



y[n] = {8,22,11,31,4,12}, n=0, 1, 2,..., 5

Propiedades sobre la duración de la convolución discreta.

El índice del comienzo de la convolución es la suma de los índices de comienzo de las respectivas señales. Si las dos señales comienzan en $n= n_0$ y $n= n_1$, la convolución comienza en $n= n_0 +n_1$.

Para dos secuencias de duración *M* y *N* , su convolución se extiende durante *M+N-1* muestreos.

Propiedades de la convolución discreta (*x[n]* h[n]= y[n]*)

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$[Ax_1+bx_2]*h=y_1+y_2$$

$$x[n]*h[n-\alpha]=x[n-\alpha]*h[n]=y[n-\alpha]$$

$$x[n-\alpha]*h[n-\beta]=y[n-\alpha-\beta]$$

$$\delta[n]*h[n]=h[n]$$

$$h[n]=\delta[n]*h[n]=\{u[n]-u[n-1]\}*h[n]=y_u[n]-y_u[n-1]$$

$$u[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$$

$$\{x[n]-x[n-1]\}*h[n]=y[n]-y[n-1]$$

La correlación y la autocorrelación:

Correlación: Es una operación similar a la convolución, con la diferencia de que en la correlación no hay que "reflejar" una de las señales:

$$R_{xy}(t)=x(t)**y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)y(\lambda-t)\,d\lambda=x(t)*y(-t)$$

Esta expresión nos indica que la relación que existe entre la convolución y la correlación.

La correlación nos da una medida de la similitud entre dos señales. No existe la propiedad conmutativa por lo que dadas dos señales *x(t)* e *y(t)* se definen dos correlaciones:

$$R_{xy}(t)=x(t)**y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)y(\lambda-t)\,d\lambda$$

$$R_{yx}(t)=y(t)**x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda)x(\lambda-t)\,d\lambda$$

que sólo coinciden en *t=0*: $R_{xy}(0)= R_{yx}(0)$

La correlación de una señal consigo misma se denomina autocorrelación:

$$R_{xx}(t)=x(t)**x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)x(\lambda-t)\,d\lambda$$

La autocorrelación representa la simulitud entre una señal y su desplazada. El máximo de autocorrelación se obtiene cuando no hay desplazamiento (*t=0*). La autocorrelación es simétrica con respecto al origen, ya que $R_{xx}(t) = R_{xx}(- t)$.

La correlación discreta:
Se definen de igual manera que en el caso continuo, así como la autocorrelación.

$$R_{xy}[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]\,y[k-n] \quad \text{para n=0, ±1, ±2, ±3, …}$$

$$R_{yx}[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[k]\,x[k-n] \quad \text{para n=0, ±1, ±2, ±3, …}$$

MATLAB dispone de dos funciones para el cálculo de convoluciones y correlaciones.

>> y = conv(x, h)
Hace la convolución de los vectores x y h. El vector resultante y tiene un tamaño igual a length(x)+ length(h)- 1
>> rxy = xcorr(x, y)
Hace la correlación de los vectores de M elementos x e y. Devuelve un vector de 2M- 1 elementos.
>> rxx = xcorr(x)
Hace la autocorrelación del vector x de M elementos. Devuelve un vector de 2M- 1 elementos.

Funciones de ventana

Las ventanas han sido objeto de muchas investigaciones y no existe una ideal para trabajar sobre una señal periódica. Una simple aunque efectiva función ventana es la ventana de Hanning.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi t}{NT}\right) & |t| < NT/2 \\ 0 & |t| > NT/2 \end{cases},$$

Existen ventanas rectangulares (boxcar en Matlab), triangulares, de hanning (hanning en Matlab), de hamming, etc.

Procedimiento

Parte I. Generación de una señal en MATLAB (Tutoría)

1. Adquiera dos señales de voz diferentes. Puede usar el archivo de guión de la práctica anterior.

```
ai=analoginput('winsound')
addchannel(ai,1);
ai.SampleRate=8000;
ai.SamplesPerTrigger=40000;
ai.TriggerType='Immediate';
start(ai)
[s1,t]=getdata(ai);
```

Parte II. Operaciones con señales digitalizadas con la tarjeta de sonido.

2. Capture dos señales desde la tarjeta de sonido, una llámela s1 y la otra s2.
3. Realice la suma y la resta de ambas señales y guarde los resultados en las variables suma y resta respectivamente.
4. Realice una función que encuentre la energía de una señal de entrada y aplíquela a las señales s1 y s2.

5. Haga el cálculo de potencia con una ventana rectangular y una de hanning para la señal s1 y para un segundo de señal (cree una función en Matlab para calcular la potencia).
6. Utilice la función de autocorrelación integrada en MATLAB para encontrar la autocorrelación de las señales s1 y de la señal s2.
7. Haga una función en MATLAB que calcule la convolución, y pruébelo haciendo la convolución de la señal s1 con la señal s2.
8. Salga de los programas, apague todo el equipo y desconecte los circuitos.

Análisis de resultados

1. Presenta las funciones que creó para el cálculo de la energía y la potencia y la convolución con Matlab.
2. Busque en el archivo de ayuda de la caja de herramientas de adquisición de datos los comandos necesarios para reproducir una señal en la tarjeta de sonido y reproduzca las señales resultantes de la suma y la resta.
3. Desplace 0.3 segundos en el tiempo una de las señales adquiridas y súmela con la misma sin desplazar y reproduzca la señal resultante. ¿Qué obtiene como resultado?
4. Presente las gráficas obtenidas en la práctica con sus respectivos nombres y títulos.

Investigación complementaria

1. Cree una función que calcule la reflexión de una señal discreta.
2. Realizar la convolución de dos señales continuas utilizando SCILAB.

Bibliografía

- The MathWorks Inc. Manual del usuario de MATLAB.